راه حل سوالات دوره اول المپیاد ریاضی سال ۱۴۰۱ (کد دفترچه: ۱)

۱- داریم: $126000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^1$. از آن‌جایی‌که تمامی توان‌های عوامل اول یک عدد مربع کامل باید زوج باشد، به ازای 2^4، انتخاب‌های $2^0, 2^2, 2^4$، به ازای 3^2، انتخاب‌های $3^0, 3^2$، به ازای 5^3، انتخاب‌های $5^0, 5^2$ و به ازای 7^1، انتخاب 7^0 وجود دارد. بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد 126000، برابر است با: $3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$.

۲- به ترتیب زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1) - 4 = f(2) - 2 \times 4 = f(3) - 3 \times 4 = f(4) - 4 \times 4 \\ &= f(5) - 5 \times 4 = 2^{10} - \log_2(5+3) - 20 = 1024 - 3 - 20 \\ &= 1001 \end{aligned}$$

۳- می‌دانیم مساحت مربع اصلی برابر است با: $5 \times 5 = 25$. از آن‌جایی‌که اعداد درون مستطیل‌ها نمایانگر مساحت هر کدام از مستطیل‌ها می‌باشد، تفاضل مجموع این اعداد و مساحت مربع اصلی، میزان هم‌پوشانی مستطیل‌ها را نمایش می‌دهد. بنابراین میزان هم‌پوشانی‌ها برابر است با:

$$(5 + 6 + 4 + 3 + 6 + 2) - 25 = 26 - 25 = 1$$

بنابراین فقط یک مربع هم‌پوشانی شده است. از طرفی می‌دانیم مستطیل دربرگیرنده عدد 5 یک مستطیل 1×5 می‌باشد، چون 5 یک عدد اول است. با استدلال مشابه، مستطیل‌های در برگیرنده اعداد 2 و 3 به ترتیب 1×2 و 1×3 می‌باشد. همچنین مستطیل دربرگیرنده اعداد 6 حتماً باید به صورت 2×3 باشد، چون مستطیل 1×6 از مربع اصلی بیرون می‌زند و این غیرممکن است.

مستطیل دربرگیرنده عدد 5، حتماً باید عمودی باشد، چون اگر افقی باشد، با مستطیل دربرگیرنده عدد 6 در گوشه سمت راست بالای مربع اصلی، حداقل دو مربع هم‌پوشانی دارد که این غیرممکن است. همچنین مستطیل‌های دربرگیرنده اعداد 6، هر دو می‌بایستی به صورت کشیدگی در راستای عمودی قرار گیرند، چون با توجه به عمودی بودن مستطیل دربرگیرنده 5، اگر هر دو مستطیل در برگیرنده عدد 6، افقی باشند، تعداد مربع‌های هم‌پوشانی بیش از یک است که این غیرممکن است و نیز اگر یکی از مستطیل‌های دربرگیرنده اعداد 6، افقی و دیگری عمودی باشد، باز هم تعداد مربع‌های هم‌پوشانی بیش از یک می‌باشد.

مربع اشاره شده در شکل زیر، تنها می‌بایستی توسط مستطیل دربرگیرنده عدد 4 پوشانده شود، چون نمی‌تواند توسط هیچ مستطیل دیگری پوشانده شود. بنابراین مستطیل در برگیرنده عدد 4 باید به صورت 1×4 باشد. واضح است که این مستطیل افقی می‌باشد. بنابراین مستطیل دربرگیرنده عدد 3 حتماً باید افقی باشد، چون در هر دو حالت عمودی آن، دو مربع هم‌پوشانی ایجاد می‌کند که این غیرممکن است.

5				6
	6			
		3		2
	4		×	

برای مستطیل در برگیرنده عدد 2، سه حالت زیر (در راستاهای مختلف) وجود دارد:

۱) حالت اول: واضح است که مستطیل در برگیرنده عدد 2 و مستطیل دربرگیرنده عدد 6 گوشه مربع اصلی، دارای یک مربع هم‌پوشانی است، بنابراین بقیه مستطیل‌ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند. در نتیجه تنها انتخاب ممکن به صورت زیر است:

5				6
	6			
		3		2
	4			

۲) در این حالت، مربع گوشه سمت راست پایین مربع اصلی، تنها می‌بایستی توسط مستطیل دربرگیرنده عدد 4 پوشانده شود. بنابراین دو انتخاب برای مستطیل دربرگیرنده عدد 3 به صورت شکل زیر وجود دارد.

5				6
	6			
		3		2
	4			

۳) در این حالت، مربع اشاره شده در شکل زیر، حتماً باید توسط مستطیل دربرگیرنده عدد 3 پوشانده شود، بنابراین دو انتخاب برای مستطیل در برگیرنده عدد 4 وجود دارد، به صورت شکل زیر:

5				6
	6			
		3	×	2
	4			

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: 5. (راهنمایی درست نیست.)

۴- واضح است که مساحت رنگ آمیزی شده شامل سه بخش، یک بخش مستطیل شکل به مساحت 20×10 در درون مربع کوچک‌تر و یک مستطیل به مساحت 20×10 و یک ربع دایره به مساحت $\frac{1}{4}.\pi 10^2$ در درون مربع بزرگ‌تر می‌باشد. بنابراین کل مساحت رنگ‌آمیزی شده برابر است با:

$$400 + 25\pi$$

۵- از آن‌جایی‌که حاصل‌ضرب اعداد سطر و ستون می‌بایستی یکسان شوند و حداقل یکی از طرف‌ها شامل عدد اول 7 می‌باشد، باید طرف دیگر نیز شامل این عامل اول باشد، بنابراین عدد 7 باید در محل اشتراک سطر و ستون قرار داشته باشد. هم‌چنین ستون شامل یک عامل اول 5 است (به دلیل وجود عدد 10)، بنابراین عدد 5 باید در سطر قرار گیرد. از طرفی اعداد 3,6,9 هر کدام به ترتیب دارای 1,1,2 عامل اول 3 می‌باشند، بنابراین 3,6 در یک طرف و عدد 9 باید در طرف دیگر تساوی قرار گیرد.

هم‌چنین اعداد 2,4,6,8,10 به ترتیب دارای 1,2,1,3,1 عامل اول 2 می‌باشند. بنابراین هر طرف باید $4 = \frac{1+2+1+3+1}{2}$ عامل اول 2 داشته باشد. بنابراین یک طرف 1,3 و طرف دیگر 1,2,1 عامل اول 2 دارد. دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

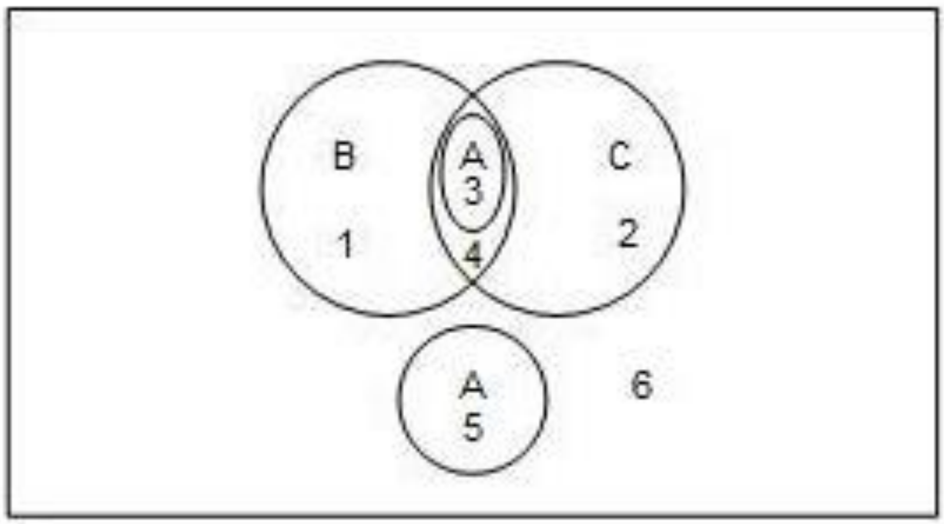
۱) اگر عدد 6 به همراه 8 در یک طرف باشد. در این صورت 6,8,3,7,5 در یک طرف و 10,4,2,7,9 در طرف دیگر تساوی قرار می‌گیرند. بنابراین مجموع اعداد ستون 32 می‌باشد.

۲) اگر عدد 6 همراه عدد 4 باشد. در این صورت اعداد 6,4,3,7,10 در یک طرف قرار دارند، عدد پنجم نمی‌تواند 5 باشد، زیرا در این‌صورت باید یک عدد دیگر دارای یک عامل اول 2 نیز به جمع آنها اضافه شود که این غیرممکن است، چون هر سطر یا ستون دارای پنج عدد است. بنابراین مجموع اعداد ستون برابر است با: 30.

۶- از تساوی مسأله واضح است که بخش اعشاری هر سه عدد a, b, c با یکدیگر برابرند. بنابراین می‌توان سه عدد $[a]$ به جای a، $[b]$ به جای b و $[c]$ به جای c در تساوی مسئله، جایگزین کرد. بنابراین به دست می‌آید: $[a] = [b] = [c]$ و از آن‌جایی که هر سه عدد a, b, c دارای بخش اعشاری برابرند، نتیجه می‌شود: $a = b = c$ که با فرض مسئله در تناقض است. بنابراین هیچ چندتایی مرتبی با شرایط مسئله وجود ندارد.

۷- با ساده سازی بر روی رابطه مسئله به دست می‌آید: $A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cup C')$. دیاگرام ون را در حالت کلی برای دو مجموعه B, C مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم. اشتراک مجموعه A با دو مجموعه $(B \cup C)'$ و $B' \cup C'$ می‌بایستی یکسان باشد. بنابراین اعضای مجموعه A یا در بخش

اشتراک این دو مجموعه قرار دارد یا در ناحیه‌ای که به هیچ کدام از این دو مجموعه تعلق ندارد (مطابق شکل زیر).



بنابراین به ازای هر عضو مجموعه $\{1,2,3,4\}$ حالت‌های زیر را داریم:

۱) فقط به مجموعه B تعلق دارد (ناحیه ۱).

۲) فقط به مجموعه C تعلق دارد (ناحیه ۲).

۳) به هر سه مجموعه A, B, C تعلق دارد (ناحیه ۳).

۴) فقط به دو مجموعه B, C تعلق دارد (ناحیه ۴).

۵) فقط به مجموعه A تعلق دارد (ناحیه ۵).

۶) به هیچ‌کدام از مجموعه‌های A, B, C تعلق ندارد (ناحیه ۶).

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$.

۸- طول ضلع مثلث برابر است با:

$$\sqrt{n} = 1 \times cotg30° + \sqrt{4^2 - 2^2} + 3 \times cotg30° = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}$$

بنابراین $n = 108$.

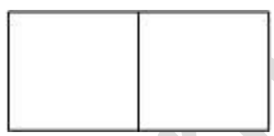
۹- از آن‌جایی‌که هر دو عدد صحیح $2x - y$ و $3x + 2y$ هر دو عدد صحیح هستند، اعداد $(3x + 2y) + 2(2x - y) = 7x$ و $2(3x + 2y) - 3(2x - y) = 7y$ نیز اعداد صحیح می‌باشند. بنابراین با توجه به شرط $0 < x, y < 1$ داریم: $x, y \in \{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\}$. از آن‌جایی‌که اگر $7x$ و $2x - y$ اعداد صحیح باشند، $3x + 2y$ نیز عدد صحیح است، بنابراین کافی است x, y را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $2x - y$ عدد صحیح باشد. بنابراین جواب‌ها به صورت زیر است:

$$(x,y)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7}\right),\left(\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right),\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right),\left(\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right),\left(\frac{5}{7},\frac{3}{7}\right),\left(\frac{6}{7},\frac{5}{7}\right)$$

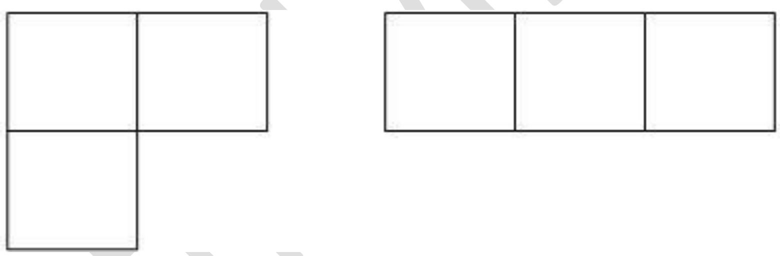
و مسئله ۶ جواب دارد.

۱۰- از عبارت اصلی مسئله داریم: $\frac{loga}{logb}+\frac{logb}{loga}=\frac{5}{2}$. با انتخاب $x=\frac{loga}{logb}>1$ به دست می‌آید: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ یا $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$ و در نتیجه $x=2$ (جواب $x=\frac{1}{2}\leq 1$ و با توجه به شرط مسئله قابل قبول نمی‌باشد). بنابراین $\frac{loga}{logb}=2$ یا $loga=2logb$ یا $a=b^2$. با جای‌گذاری آن در رابطه دیگر مسئله به دست می‌آید: $(b^2)^b=b^{b^2}$ یا $b^{2b}=b^{b^2}$ یا $2b=b^2$ و در نتیجه $b=2$ و $a=4$. بنابراین نتیجه می‌شود: $a+b=6$.

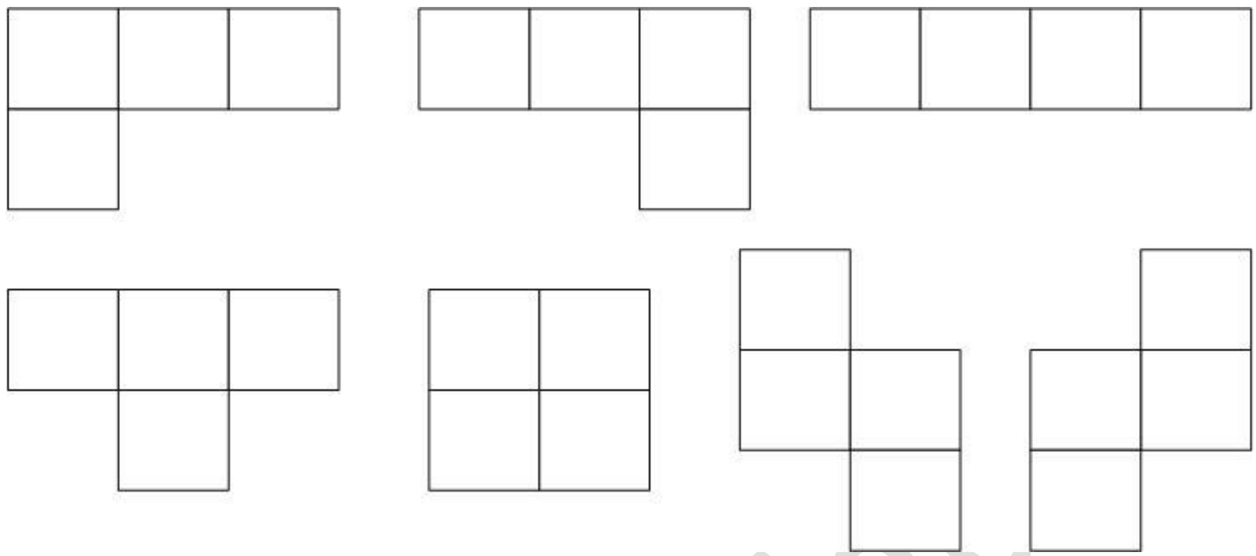
۱۱- به سادگی می‌توان با اضافه کردن مربع‌ها در تمامی وجه‌های شکل‌ها و حذف حالت‌های تکراری (با در نظر گرفتن دوران و انتقال) به تعداد کل حالات در شرایط ۵ مربع رسید. واضح است که در شرایط ۲ مربع، تعداد کل حالات برابر با ۱ مطابق شکل زیر می‌باشد:



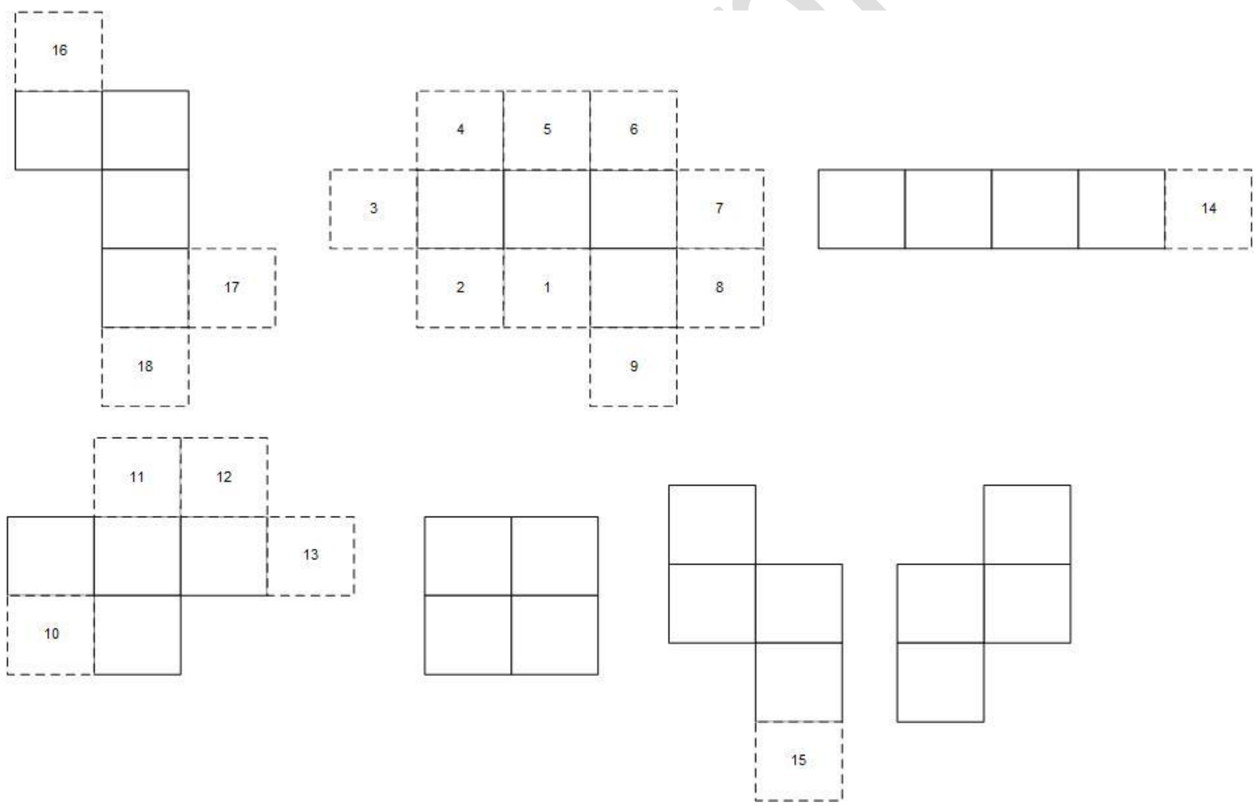
در شرایط ۳ مربع، تعداد حالات برابر با ۲ و مطابق شکل زیر است:



در شرایط ۴ مربع، تعداد حالات برابر با ۷ و مطابق شکل زیر است:



در شرایط ۵ مربع، تعداد کل حالات ۱۸ و مطابق شکل زیر است (مربع پنجم به صورت خطچین به شکل‌های قبلی اضافه شده است):



۱۲- در مثلث PCE داریم: $\angle CPE = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{8} \times 2 = \frac{\pi}{4}$. بنابراین با استفاده از رابطه کسینوس‌ها در مثلث به دست می‌آید: $CE = \sqrt{PC^2 + PE^2 - 2PC.PEcos\angle CPE} = 5$. حال در مثلث OCE داریم: $\angle COE = \frac{\pi}{2}$. بنابراین $CE = \sqrt{2}R$ یا $R = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

۱۳- با تقسیم طرفین رابطه اصلی مسئله بر $9xyz$، به دست می‌آید: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{8}{9}$. بدون این‌که از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم $x \le y \le z$ و نیز می‌دانیم $x > 1$. بنابراین $2 \le x \le y \le z$. اگر $x \ge 4$ داریم: $\frac{8}{9}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{4}$ که غیرممکن است. بنابراین $x = 2,3$. فرض می‌کنیم $x = 2$. واضح است که $y > 2$ و نیز فرض می‌کنیم اگر $y \ge 6$ باشد داریم: $\frac{7}{18}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{3}$ که غیرممکن است. بنابراین $y \in \{3,4,5\}$. با امتحان هر یک از این مقادیر تنها مسئله به ازای $y = 3$ جواب دارد و داریم $(x,y,z) = (2,3,18)$.

فرض می‌کنیم $x = 3$. داریم $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{9}$. اگر $y \ge 4$ باشد، داریم: $\frac{5}{9}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{2}$ که این غیرممکن است. بنابراین تنها حالت ممکن $y = 3$ می‌باشد که مسئله جواب ندارد. بنابراین تعداد جواب‌های مسئله، تعداد جای‌گشت‌های جواب‌های $(2,3,18)$، $3! = 6$ می‌باشد.

۱۴- واضح است که $y = -x$ نمی‌تواند جواب مسئله باشد. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ جواب مسئله نمی‌باشد. هم‌چنین $y = x$، $y = x \pm 2\pi$ و $y = \pi - x$ نیز جواب مسئله‌اند. بنابراین گزینه ۵ جواب مسئله است.

۱۵- واضح است که الگوی رنگ آمیزی جدول به صورت تعدادی ستون و سطر می‌باشد. اگر فرض کنیم که تعداد سطرها m و تعداد ستون‌ها n باشد، تعداد کل خانه‌های سیاه شده، برابر است با:

$$8m + 8n - mn = \frac{3}{4}\times 64 = 48$$

(چون به تعداد mn خانه دوبار شمرده شده است.) واضح است که $0 \le m,n \le 6$. حال معادله سیاله فوق را حل می‌کنیم. داریم: $m = \frac{8(6-n)}{8-n} = 8 - \frac{16}{8-n}$. بنابراین $8 - n \in \{2,4,8\}$ یا $n \in \{0,4,6\}$. بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$(m,n) = (0,6),(4,4),(6,0)$$

از طرفی به ازای هر (m,n) تعداد حالت‌های رنگ آمیزی برابر است با: $\binom{8}{m}\binom{8}{n}$. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\sum_{(m,n)}\binom{8}{m}\binom{8}{n} = \binom{8}{0}\binom{8}{6}+\binom{8}{6}\binom{8}{0}+\binom{8}{4}\binom{8}{4} = 4956$$

۱۶- این مسئله را با استفاده از هندسه تحلیلی حل می‌کنیم. محورهای مختصات را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که مبدأ آن، نقطه B و محور x ها در راستای BC و محور y ها در راستای AB باشد. در این‌صورت مختصات نقاط عبارتند از: $B(0,0), E(3,-2), F(3,4), D(3,3), K(x_K,0)$.

معادله دایره را در حالت کلی می‌نویسیم: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. واضح است که چون دایره بر خط AB (محور y ها) مماس است، داریم $a=R$. با جای‌گذاری آن در معادله دایره و ساده سازی آن به دست می‌آید: $(y-b)^2=2xR-x^2$. با جای‌گذاری مختصات نقاط E,F در معادله دایره، مقادیر b و R به دست می‌آید: $b=1$ و $R=3$. برای به دست آوردن x_K، کافی است مختصات نقطه K ($y_k=0$) را در معادله دایره قرار دهیم و مقدار کوچک‌تر به دست آمده را برای x_K در نظر بگیریم، داریم: $x_K=3-\sqrt{8}$. داریم: $DK=\sqrt{(\sqrt{8})^2+3^2}=\sqrt{17}$.

۱۷- با توجه به شرط مسئله داریم: $a+c=b+d\ (mod\ 7)$. بنابراین با کمی آزمون و انتخاب تمامی زوج‌های ممکن، می‌توان زوج دیگر را از بین ۴ عدد باقیمانده مجموعه به گونه‌ای انتخاب نمود که شرط فوق را داشته باشد، به صورت زیر: ($(a,c)\leftrightarrow(b,d)$)

$$(1,2)\leftrightarrow(4,6),(1,3)\leftrightarrow(5,6),(1,4)\leftrightarrow(2,3),(1,5)\leftrightarrow(2,4),(1,6)\leftrightarrow(2,5),(1,6)\leftrightarrow(3,4),(2,5)\leftrightarrow(3,4),(2,6)\leftrightarrow(3,5),(3,6)\leftrightarrow(4,5)$$

بنابراین تعداد ۹ زیرمجموعه عجیب به صورت زیر داریم.

$$\{1,2,4,6\},\{1,3,5,6\},\{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\},\{1,2,5,6\},\{1,3,4,6\},\{2,3,4,5\},\{2,3,5,6\},\{3,4,5,6\}$$

۱۸- فرض می‌کنیم $f(x)<f(y)$. بنابراین $\frac{1}{x^x}+\frac{1}{x^4}<\frac{1}{y^y}+\frac{1}{y^4}$. با ساده سازی به دست می‌آید:

$$(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2})(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+1)>0$$

چون $(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+1)>0$، بنابراین $(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2})>0$ یا $y^2<x^2$ ($x,y\neq0$). حال با توجه به نامعادله مسئله داریم: $(2a+1)^2<(a-2)^2$. با ساده‌سازی آن به دست می‌آید:

$$a^2+\frac{8}{3}a-1<0 \text{ یا } (a+3)(a-\frac{1}{3})<0 \text{ یا } -3<a<\frac{1}{3}$$

($(a-2),(2a+1)\neq0$). بنابراین جواب‌های مسئله عبارتند از $a=-2,-1,0$ که تعداد آنها 3 می‌باشد.

۱۹- از آن‌جایی‌که به تعداد ۱۴۰۱ فرد، جواب متمایز وجود دارد، هیچ دو فردی جواب یکسان نداده است. بنابراین هیچ دو فرد راستگویی نمی‌توانند پشت سر هم باشند، چون جواب یکسان می‌دهند. بنابراین تعداد افراد دروغگو عبارتند از: $700,701,\ldots,1401$ و در نتیجه تعداد افراد دروغگو $1401-700+1=702$ عدد مختلف است. (تعداد افراد دروغگو نمی‌تواند کمتر از 700 باشد، چون حتماً دو فرد راستگو پشت سر هم قرار خواهند گرفت.)

توضیح: برای این‌که جواب‌های دریافتی مجموعه $\{0,1,2,\dots,1401\}$ را تولید کند، ابتدا جواب‌های افراد راستگو را ثبت می‌کنیم و از مجموعه کنار می‌گذاریم و بقیه جواب‌های دریافتی را به گونه‌ای بین افراد دروغگو توزیع می‌کنیم که با تعداد افراد دروغگو در پشت سر آنها متفاوت باشد.

۲۰- قطر بزرگ لوزی را $2x$ و قطر کوچک لوزی را $2y$ و ارتفاع هرم را h در نظر می‌گیریم. داریم: $8^2 = h^2 + x^2$ و $5^2 = h^2 + y^2$ و محیط قاعده هرم برابر است با: $4\sqrt{x^2 + y^2}$. با توجه به فرض مسئله $4\sqrt{x^2 + y^2} = 2m$ که در آن m یک عدد طبیعی می‌باشد. بنابراین داریم: $x^2 + y^2 = (\frac{m}{2})^2$. از طرفی با جمع دو عبارت فوق، داریم: $2h^2 + (x^2 + y^2) = 8^2 + 5^2 = 89$. با جای‌گذاری مقدار $x^2 + y^2 = (\frac{m}{2})^2$ در آن به دست می‌آید:

$$m^2 + 8h^2 = 356$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی m با توجه به رابطه فوق برابر است با: $m = 18$ و در نتیجه $h = 2$. بنابراین به دست می‌آید: $x = 2\sqrt{15}$ و $y = \sqrt{21}$ و $AB = 9$. بنابراین می‌بایستی مساحت مثلث‌های جانبی را با اضلاع به طول 5,8,9 به دست آوریم: $p = \frac{5+8+9}{2} = 11$ و $S = \sqrt{11(11-5)(11-8)(11-9)} = 6\sqrt{11}$ و در نتیجه مساحت جانبی هرم برابر است با چهار برابر مساحت هر یک از این مثلث‌های جانبی: $24\sqrt{11}$.

۲۱- واضح است که برای این‌که $5|f(n)$، باید باقیمانده تقسیم عدد n بر 5، برابر با 1 باشد یا $n = 5k + 1$، چون در غیر این‌صورت داریم: $5|n(n+1)(n+2)(n+3)$ و $5 \nmid f(n)$ و شرط مسئله برقرار نمی‌باشد. حال اثبات می‌کنیم که به ازای همه اعداد به صورت $n = 5k + 1$، $25|f(n)$. با جای‌گذاری $n = 5k + 1$ در رابطه $f(n)$، کافی است که دو جمله کم‌ترین توان را بر حسب $5k$ بررسی کنیم، چون بقیه جملات بر 25 بخش‌پذیرند. دو جمله کم‌ترین توان بر حسب $5k$ به صورت زیر می‌باشد:

$$5k(1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 4 + 1 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4) + 25$$
$$= 5k.(50) + 25$$

که واضح است بر 25 بخش‌پذیر است. بنابراین همه اعداد به صورت $5k + 1$ در بازه $1 \le n \le 999$، یا $0 \le k \le 199$، جواب مسئله است که تعداد جواب‌ها 200 می‌باشد.

۲۲- اگر جمله 1 در $f(x)$ باشد، واضح است که ریشه صحیح معادله $f(x) = 0$ باید عدد 1 را بشمارد. بنابراین ریشه‌های صحیح، فقط اعداد $1, -1$ می‌توانند باشند. اگر جمله 1 در $f(x)$ نباشد، ریشه‌های صحیح معادله $f(x) = 0$ فقط اعداد $0,1,-1$ می‌توانند باشند. از طرفی می‌دانیم $f(1) > 0$. بنابراین با توجه به شرط مسئله برای داشتن دقیقاً دو ریشه صحیح متمایز، اعداد $0, -1$ ریشه‌های

معادله هستند و جمله 1 در چندجمله‌ای $f(x)$ وجود ندارد. می‌دانیم ریشه -1 هنگامی وجود دارد که تعداد جمله‌های با توان فرد با تعداد جمله‌های با توان زوج در $f(x)$ برابر باشند.

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های با شرایط مسئله به ازای m ($1 \leq m \leq 5$) جمله با توان زوج و فرد برابر است با: $\binom{5}{m}\binom{5}{m} = (\binom{5}{m})^2$. بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌ها با شرایط مسئله برابر است با:

$$\sum_{m=1}^{5}(\binom{5}{m})^2 = 251$$

۲۳- واضح است که تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $9 \times 9 \times 9$. حال فرض می‌کنیم کارت حلزون با شماره 10 دست آرتین باشد، واضح است که تعداد حالت‌های مسئله برابر است با: 9×9.

حال این روش را ادامه می‌دهیم و تعداد حالت‌های مردود اضافی را از قبلی حذف می‌کنیم. بنابراین داریم:

تعداد حالت‌های کارت حلزون با شماره 9: $9 \times 9 - 1$ (تنها حالت $(1,1)$ برای کارت‌های شاپرک و قورباغه حذف شده است.)

تعداد حالت‌های کارت حلزون با شماره 8: $9 \times 9 - 1 - 2$ (حالت‌های $(1,2)$ و $(2,1)$ حذف شده‌اند.)

تعداد حالت‌های کارت حلزون با شماره 7: $9 \times 9 - 1 - 2 - 3$.

تعداد حالت‌های کارت حلزون با شماره 6: $9 \times 9 - 1 - 2 - 3 - 4 + 1$ (حالت $(2,4)$ قبلاً حذف شده بود.)

تعداد حالت‌های کارت حلزون با شماره 5: $9 \times 9 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 + 1 + 1$.

تعداد حالت‌های کارت حلزون با شماره 4:

$9 \times 9 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 1 + 1 + 2$.

تعداد کارت‌های حلزون با شماره 3:

$9 \times 9 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 + 1 + 1 + 2 + 2$.

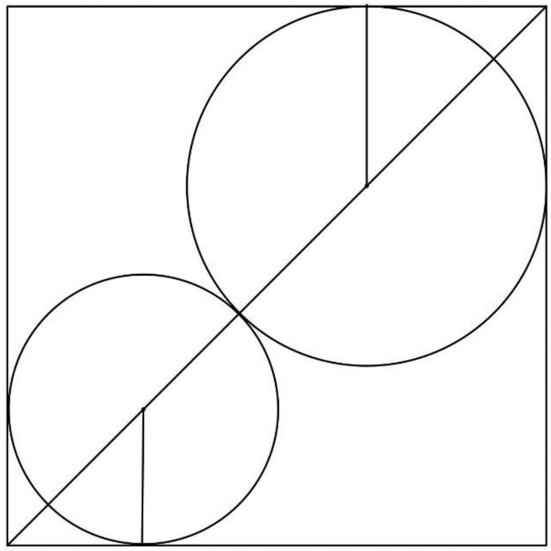
تعداد کارت‌های حلزون با شماره 2:

$$9 \times 9 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2$$

بنابراین احتمال مسئله به صورت زیر است:

$$\frac{9 \times 9 \times 9 - 2 \times (8 + 14 + 18 + 20) + 21}{9 \times 9 \times 9} = \frac{9 \times 9 - 11}{9 \times 9} = \frac{70}{81}$$

۲۴- هنگامی بیش‌ترین مقدار جمع محیط‌های دو دایره اتفاق می‌افتد که دو دایره با یکدیگر و با مربع مماس باشند مطابق شکل زیر (شعاع دایره‌ها در این حالت می‌تواند برابر نباشد).



واضح است که داریم: $\sqrt{2}=\sqrt{2}R_1+(R_1+R_2)+\sqrt{2}R_2$ (R_1,R_2 شعاع‌های دایره‌ها هستند). بنابراین داریم: $R_1+R_2=2-\sqrt{2}$. بنابراین مجموع محیط‌های دو دایره برابر است با: $2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\cong 3.68$. همچنین محیط مربع برابر است با 4. بنابراین تنها گزاره ۳ نادرست می‌باشد و بقیه گزاره‌ها درست می‌باشد.

۲۵- می‌دانیم اگر یک خانه عدد غیراول باشد، حداکثر تعداد ۴ خانه عدد اول متمایز می‌تواند در همسایگی آن وجود داشته باشد، به طوری‌که شرایط مسئله برقرار باشد (به عنوان مثال، کافی است عدد غیراول را حاصل‌ضرب ۴ عدد اول متمایز همسایه‌اش در نظر بگیریم). بنابراین از هر ۵ خانه، حداقل یک خانه عدد غیراول می‌باشد. از آن‌جایی‌که تعداد خانه‌های جدول $16=3\times5+1$ می‌باشد، بنابراین تعداد حداقل $4=3+1$ خانه، عدد غیراول داریم یا به بیان دیگر، تعداد خانه‌های اعداد اول متمایز، کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ می‌باشد. بنابراین اگر نشان دهیم حالتی وجود دارد که ۱۲ خانه عدد اول متمایز در جدول با شرایط مسئله قرار دارد، مسئله حل شده است و جواب مسئله ۱۲ می‌باشد.

شکل زیر را در نظر می‌گیریم که در آن خانه‌های مشخص شده، اعداد غیراول (حاصل‌ضرب اعداد اول متمایز همسایه خود) می‌باشد.

	×		
			×
×			
		×	