مسائل المپیاد ریاضی مرحله دوم ایران- اردیبهشت سال ۱۴۰۲

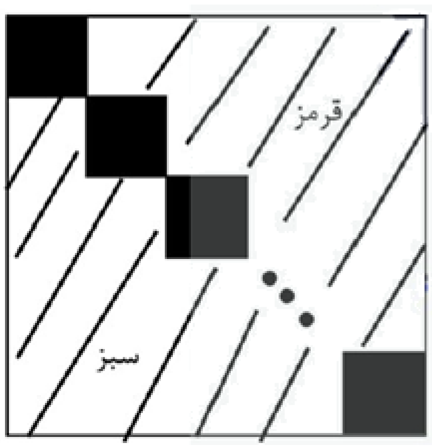
۱- در مثلث ABC می‌دانیم $\angle A = 90°$. P نقطه‌ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می‌نامیم. PD، خطوط AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. همچنین دایره‌های APE و APF به ترتیب BP را در X و CP را در Y قطع می‌کنند. ثابت کنید PD، BY و CX همرس هستند.

۲- ثابت کنید به ازای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$، یک n-تایی مرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یکدیگر اول وجود دارد که همگی از 1402 بزرگ‌تر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$\left[\frac{a_1}{a_2}\right] + \left[\frac{a_2}{a_3}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{a_1}\right] = \left[\frac{a_2}{a_1}\right] + \left[\frac{a_3}{a_2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_1}{a_n}\right]$$

(منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که کوچک‌تر یا مساوی x باشد)

۳- یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، خانه سطر i-ام و ستون j-ام را با قاعده زیر رنگ می‌کنیم:



۱) اگر $i = j$، سیاه

۲) اگر $i < j$، قرمز

۳) اگر $j < i$، سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می‌نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n-تایی مرتب $(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n})$ را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n-تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n-تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند.)

۴- عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه‌های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲) و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \ldots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

۵- یک دنباله $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدرنسبت $Q(x)$ می‌گوییم هرگاه برای هر n، $P_{n+1} = P_n + Q$.

فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله اول $P(x)$ داریم به طوری‌که P و Q چندجمله‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه صحیح دارد. ثابت کنید:

الف) $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است.

ب) چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

۶- دو دایره W_1, W_2 با شعاع‌های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره‌های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره‌های W_2 و W_1 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که $\angle BPQ = \angle BYQ$ و $\angle CPQ = \angle CXQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های XPC و YPB را S می‌نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS همرس هستند.